

2023 年上海春考数学试卷（回忆版）

一、填空题（前 6 题一题 4 分，后 6 题一题 5 分，共 54 分）

- 1、已知集合 $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{1, a\}$ ，且 $A = B$ ，则 $a =$ _____.
- 2、已知向量 $\vec{a} = (3, 4)$ ， $\vec{b} = (1, 2)$ ，则 $\vec{a} - 2\vec{b} =$ _____.
- 3、若不等式 $|x - 1| \leq 2$ ，则实数 x 的取值范围为_____.
- 4、已知圆 C 的一般方程为 $x^2 + 2x + y^2 = 0$ ，则圆 C 的半径为_____.
- 5、已知事件 A 发生的概率为 $P(A) = 0.5$ ，则它的对立事件 $\bar{A}$ 发生的概率 $P(\bar{A}) =$ _____.
- 6、已知正实数 a 、 b 满足 $a + 4b = 1$ ，则 ab 的最大值为_____.
- 7、某校抽取 100 名学生测身高，其中身高最大值为 186cm，最小值为 154cm，根据身高数据绘制频率组距分布直方图，组距为 5，且第一组下限为 153.5，则组数为_____.
- 8、设 $(1 - 2x)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ ，则 $a_0 + a_4 =$ _____.
- 9、已知函数 $f(x) = 2^{-x} + 1$ ，且 $g(x) = \begin{cases} \log_2(x+1), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$ ，则方程 $g(x) = 2$ 的解为_____.
- 10、已知有 4 名男生 6 名女生，现从 10 人中任选 3 人，则恰有 1 名男生 2 名女生的概率为_____.
- 11、设 $z_1, z_2 \in C$ 且 $z_1 = i \cdot \overline{z_2}$ ，满足 $|z_1 - 1| = 1$ ，则 $|z_1 - z_2|$ 的取值范围为_____.
- 12、已知空间向量 $\vec{OA}$ ， $\vec{OB}$ ， $\vec{OC}$ 都是单位向量，且 $\vec{OA} \perp \vec{OB}$ ， $\vec{OA} \perp \vec{OC}$ ， $\vec{OB}$ 与 $\vec{OC}$ 的夹角为 60° ，若 P 为空间任意一点，且 $|\vec{OP}| = 1$ ，满足 $|\vec{OP} \cdot \vec{OC}| \leq |\vec{OP} \cdot \vec{OB}| \leq |\vec{OP} \cdot \vec{OA}|$ ，则 $\vec{OP} \cdot \vec{OC}$ 的最大值为_____.

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 18 分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，第 13 题至第 14 题选对得 4 分，第 15 题至第 16 题选对得 5 分，否则一律得零分.

13、下列函数是偶函数的是（ ）

A. $y = \sin x$ B. $y = \cos x$ C. $y = x^3$ D. $y = 2^x$

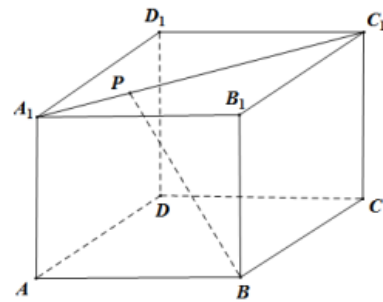
14、如图所示，下面是出口，上面是进口，哪个进出口贸易总额不对（ ）



- A. 从 2018 年开始后，图表中最后一年增长率最大
 B 从 2018 年开始后，进出口总额逐年增大
 C. 从 2018 年开始后，进口总额逐年增大
 D. 从 2018 年开始后，图表中 2020 年的增长率最小

15、如图， P 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 边 A_1C_1 上的动点，下列哪条边与边 BP 始终异面
 ()

- A. DD_1 B. AC C. AD_1 D. B_1C



16、已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数， S_n 为其前 n 项和，若对任意 $k > 2022$ ，都有 $|S_k| > |S_{k+1}|$ ，
 则下列说法正确的是 ()

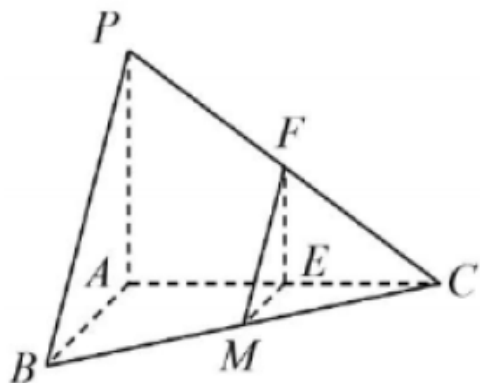
- A. $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}$ 为等差数列， $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}$ 为等比数列；
 B. $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}$ 为等比数列， $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}$ 为等差数列；
 C. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2022}$ 为等差数列， $a_{2022}, a_{2023}, \dots, a_n$ 为等比数列；
 D. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2022}$ 为等比数列， $a_{2022}, a_{2023}, \dots, a_n$ 为等差数列。

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 78 分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

17. (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

已知三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp AC$ ， $PB = AB = 3$ ， $AC = 4$ ， M 为 BC 中点，过点 M 分别作平行于平面 PAB 的直线交 AC 、 PC 于点 E ， F 。

- (1) 求直线 PM 与平面 ABC 所成角的大小；
- (2) 证明： $ME \parallel$ 平面 PAB ，并求直线 ME 到平面 PAB 的距离.



18. (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

在 $\triangle ABC$ 中，角 A ， B ， C 对应边为 a ， b ， c ，其中 $b = 2$ 。

- (1) 若 $A + C = 120^\circ$ ，且 $a = 2c$ ，求边长 c ；
- (2) 若 $A - C = 15^\circ$ ， $a = \sqrt{2}c \sin A$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 。

19. (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

已知 S 为正比例系数，定义： $S = \frac{F_0}{V_0}$ ， F_0 为建筑物暴露在空气中的面积（单位：平方米）， V_0 为建筑物的体积（单位：立方米）。

- (1) 若有一个圆柱体建筑的底面半径为 R ，高度为 H ，求该建筑体的 S （用 R ， H 表示）；
- (2) 现有一个建筑体，侧面皆垂直于地面，设 A 为底面面积， L 为建筑底面周长. 已知 f 为正比例系数， L^2 与 A 成正比，定义： $f = \frac{L^2}{A}$ ，建筑面积即为每一层的底面面积，总建筑面积即为每层建筑面积之和，值为 T 。已知该建筑体推导得出 $S = \sqrt{\frac{f \cdot n}{T}} + \frac{1}{3n}$ ， n 为层数，层高为 3 米，其中 $f = 18$ ， $T = 100000$ ，试求当取第几层时，该建筑体 S 最小？

20. (本题满分 18 分) 本题共有 3 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 8 分.

已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (m > 0, m \neq \sqrt{3})$.

(1) 若 $m = 2$, 求椭圆 Γ 的离心率;

(2) 设 A_1, A_2 为椭圆 Γ 的左右顶点, 若椭圆 Γ 上一点 E 的纵坐标为 1, 且 $\overrightarrow{EA_1} \cdot \overrightarrow{EA_2} = -2$, 求 m 的值;

(3) 若 P 为椭圆 Γ 上一点, 过点 P 作一条斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与双曲线 $\frac{y^2}{5m^2} - \frac{x^2}{5} = 1$ 仅有一个公共点, 求 m 的取值范围.

21. (本题满分 18 分) 本题共有 3 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 8 分.

设函数 $f(x) = ax^3 - (a+1)x^2 + x$, $g(x) = kx + m$, 其中 $a \geq 0, k, m \in \mathbb{R}$, 若任意 $x \in [0, 1]$ 均有 $f(x) \leq g(x)$, 则称函数 $y = g(x)$ 是函数 $y = f(x)$ 的“控制函数”, 且对于所有满足条件的函数 $y = g(x)$ 在 x 处取得的最小值记为 $\bar{f}(x)$.

(1) 若 $a = 2$, $g(x) = x$, 试问 $y = g(x)$ 是否为 $y = f(x)$ 的“控制函数”;

(2) 若 $a = 0$, 使得直线 $y = h(x)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在 $x = \frac{1}{4}$ 处的切线, 证明: 函数 $y = h(x)$ 为函数 $y = f(x)$ 的“控制函数”, 并求 $\bar{f}\left(\frac{1}{4}\right)$ 的值;

(3) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_0 (x_0 \in (0, 1))$ 处的切线过点 $(1, 0)$, 且 $c \in [x_0, 1]$, 证明: 当且仅当 $c = x_0$ 或 $c = 1$ 时, $\bar{f}(c) = f(c)$.

参考答案

(周楠老师提供手写稿解答)

一、填空题(本大题共有 12 题, 满分 54 分) 考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果, 第 1 题至第 6 题每个空格填对得 4 分, 第 7 题至第 12 题每个空格填对得 5 分, 否则一律得零分.

1、已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, a\}$, 且 $A = B$, 则 $a =$ _____.

【解析】2.

2、已知向量 $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (1, 2)$, 则 $\vec{a} - 2\vec{b} =$ _____.

【解析】(1, 0).

3、若不等式 $|x - 1| \leq 2$, 则实数 x 的取值范围为_____.

【解析】 $[-1, 3]$.

4、已知圆 C 的一般方程为 $x^2 + 2x + y^2 = 0$, 则圆 C 的半径为_____.

【解析】1.

5、已知事件 A 发生的概率为 $P(A) = 0.5$, 则它的对立事件 $\bar{A}$ 发生的概率 $P(\bar{A}) =$ _____.

【解析】 $\frac{1}{2}$.

6、已知正实数 a 、 b 满足 $a + 4b = 1$, 则 ab 的最大值为_____.

【解析】 $\frac{1}{16}$.

7、某校抽取 100 名学生测身高, 其中身高最大值为 186cm, 最小值为 154cm, 根据身高数据绘制频率组距分布直方图, 组距为 5, 且第一组下限为 153.5, 则组数为_____.

【解析】7.

8、设 $(1 - 2x)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则 $a_0 + a_4 =$ _____.

【解析】17.

9. 已知函数 $f(x) = 2^{-x} + 1$, 且 $g(x) = \begin{cases} \log_2(x+1), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$, 则方程 $g(x) = 2$ 的解为_____.

【解析】3.

10、已知有 4 名男生 6 名女生, 现从 10 人中任选 3 人, 则恰有 1 名男生 2 名女生的概率为

【解析】 $\frac{1}{2}$.

11、设 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 且 $z_1 = i \cdot \overline{z_2}$, 满足 $|z_1 - 1| = 1$, 则 $|z_1 - z_2|$ 的取值范围为_____.

【解析】 $[0, 2 + \sqrt{2}]$.

$$\begin{aligned} \text{设 } z_2 - 1 &= \cos\theta + \sin\theta i \quad z_1 = i(\cos\theta + 1 + \sin\theta i) = -\sin\theta + (\cos\theta + 1)i \\ |z_1 - z_2|^2 &= 2(\sin\theta + \cos\theta + 1)^2 \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \\ \therefore |z_1 - z_2| &\in [0, 2 + \sqrt{2}] \end{aligned}$$

12、已知空间向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 都是单位向量, 且 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 60° , 若 P 为空间任意一点, 且 $|\overrightarrow{OP}| = 1$, 满足 $|\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC}| \leq |\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB}| \leq |\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}|$, 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC}$ 的最大值为_____.

【解析】 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

$$\begin{aligned} |\cos\angle POC| &\leq |\cos\angle POB| \leq |\cos\angle POA|, \text{ 由对称性 } \angle POB = \angle POC \text{ 且 } \angle POA = 90^\circ \\ \text{设 } \angle POA = \theta &= \angle POC \Rightarrow \cos\theta = \cos(90^\circ - \theta) \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow \cos\theta &= \frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC})_{\max} = 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{\sqrt{21}}{5} \end{aligned}$$

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 18 分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，第 13 题至第 14 题选对得 4 分，第 15 题至第 16 题选对得 5 分，否则一律得零分.

13、下列函数是偶函数的是（ ）

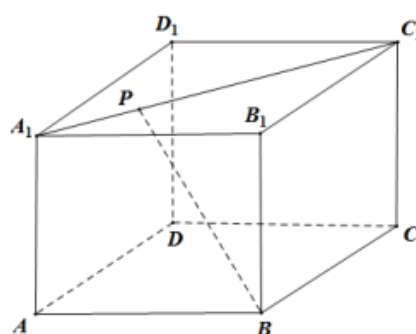
A. $y = \sin x$ B. $y = \cos x$ C. $y = x^3$ D. $y = 2^x$

【解析】 B.

14、如图所示，下面是出口，上面是进口，哪个进出口贸易总额不对（ ）

（注：此题缺一张图表）

- A. 从 2018 年开始后，图表中最后一年增长率最大
- B. 从 2018 年开始后，进出口总额逐年增大
- C. 从 2018 年开始后，进口总额逐年增大
- D. 从 2018 年开始后，图表中 2020 年的增长率最小



【解析】C.

15、如图， P 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 边 A_1C_1 上的动点，下列哪条边与边 BP 始终异面（ ）

A. DD_1 B. AC C. AD_1 D. B_1C

【解析】B.

16、已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数， S_n 为其前 n 项和，若对任意 $k > 2022$ ，都有 $|S_k| > |S_{k+1}|$ ，则下列说法正确的是（ ）

A. $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}$ 为等差数列， $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}$ 为等比数列；

B. $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}$ 为等比数列， $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}$ 为等差数列；

C. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2022}$ 为等差数列， $a_{2022}, a_{2023}, \dots, a_n$ 为等比数列；

D. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2022}$ 为等比数列， $a_{2022}, a_{2023}, \dots, a_n$ 为等差数列.

【解析】C.

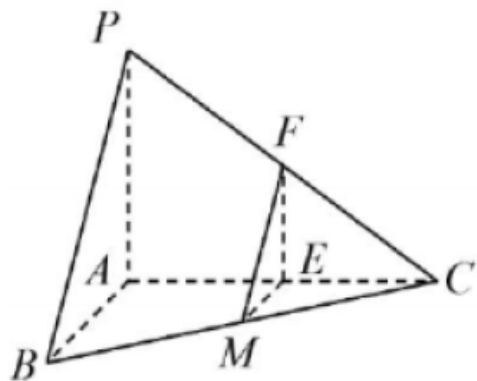
三、解答题（本大题共有 5 题，满分 78 分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

17. (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

已知三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp AC$ ， $PB = AB = 3$ ， $AC = 4$ ， M 为 BC 中点，过点 M 分别作平行于平面 PAB 的直线交 AC 、 PC 于点 E 、 F .

(1) 求直线 PM 与平面 ABC 所成角的大小；

(2) 证明： $ME \parallel$ 平面 PAB ，并求直线 ME 到平面 PAB 的距离.



【解析】(1) $\arctan \frac{6}{5}$ ，(2) 证明略，距离为 2.

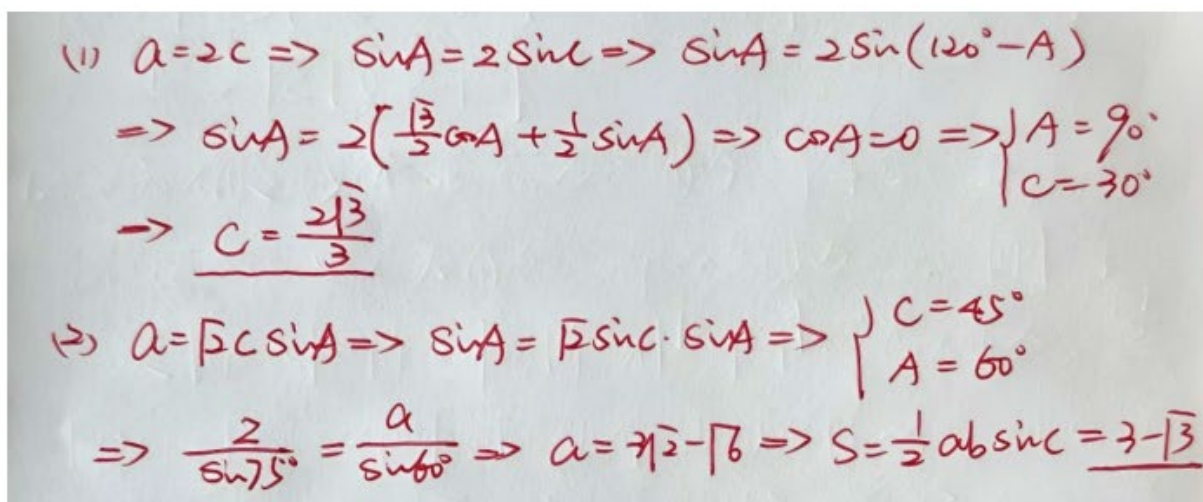
18. (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分.

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对应边为 a, b, c , 其中 $b=2$.

(1) 若 $A+C=120^\circ$, 且 $a=2c$, 求边长 c ;

(2) 若 $A-C=15^\circ$, $a=\sqrt{2}c\sin A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$.

【解析】(1) $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, (2) $3-\sqrt{3}$.



(1) $a=2c \Rightarrow \sin A = 2 \sin C \Rightarrow \sin A = 2 \sin(120^\circ - A)$
 $\Rightarrow \sin A = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A\right) \Rightarrow \cos A = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 90^\circ \\ C = 30^\circ \end{cases}$
 $\rightarrow \underline{c = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$

(2) $a = \sqrt{2}c \sin A \Rightarrow \sin A = \sqrt{2} \sin C \cdot \sin A \Rightarrow \begin{cases} C = 45^\circ \\ A = 60^\circ \end{cases}$
 $\Rightarrow \frac{2}{\sin 75^\circ} = \frac{a}{\sin 60^\circ} \Rightarrow a = 7/2 - \sqrt{6} \Rightarrow S = \frac{1}{2} ab \sin C = \underline{3 - \sqrt{3}}$

19. (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分.

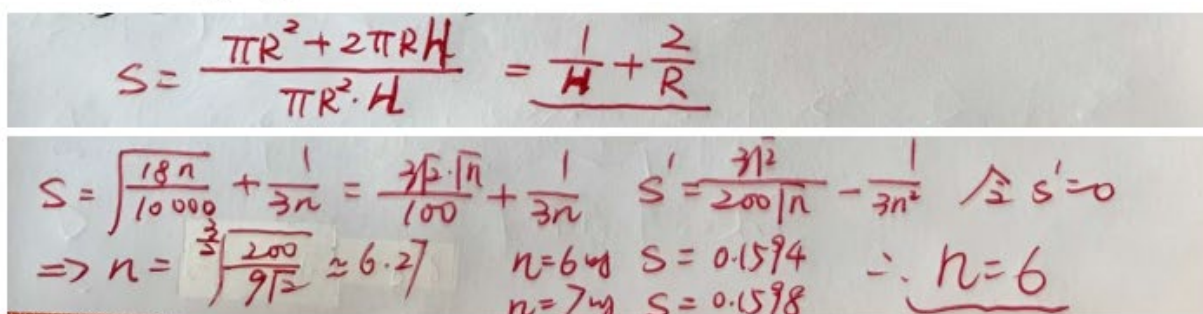
已知 S 为正比例系数, 定义: $S = \frac{F_0}{V_0}$, F_0 为建筑物暴露在空气中的面积 (单位: 平方米),

V_0 为建筑物的体积 (单位: 立方米).

(1) 若有一个圆柱体建筑的底面半径为 R , 高度为 H , 求该建筑体的 S (用 R, H 表示);

(2) 现有一个建筑体, 侧面皆垂直于地面, 设 A 为底面面积, L 为建筑底面周长. 已知 f 为正比例系数, L^2 与 A 成正比, 定义: $f = \frac{L^2}{A}$, 建筑面积即为每一层的底面面积, 总建筑面积即为每层建筑面积之和, 值为 T . 已知该建筑体推导得出 $S = \sqrt{\frac{f \cdot n}{T}} + \frac{1}{3n}$, n 为层数, 层高为 3 米, 其中 $f=18$, $T=100000$, 试求当取第几层时, 该建筑体 S 最小?

【解析】(1) $\frac{1}{H} + \frac{2}{R}$, (2) $n=6$.



$S = \frac{\pi R^2 + 2\pi R H}{\pi R^2 \cdot H} = \frac{1}{H} + \frac{2}{R}$

$S = \sqrt{\frac{18n}{100000}} + \frac{1}{3n} = \frac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{n}}{100} + \frac{1}{3n}$ $S' = \frac{\sqrt{18}}{200\sqrt{n}} - \frac{1}{3n^2}$ $\text{令 } S' = 0$
 $\Rightarrow n = \sqrt[3]{\frac{200}{9\sqrt{18}}} \approx 6.27$ $n=6$ 时 $S = 0.1594$ $n=7$ 时 $S = 0.1598$ $\therefore \underline{n=6}$

20. (本题满分 18 分) 本题共有 3 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 8 分.

已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (m > 0, m \neq \sqrt{3})$.

(1) 若 $m=2$, 求椭圆 Γ 的离心率;

(2) 设 A_1, A_2 为椭圆 Γ 的左右顶点, 若椭圆 Γ 上一点 E 的纵坐标为 1, 且 $\overrightarrow{EA_1} \cdot \overrightarrow{EA_2} = -2$, 求 m 的值;

(3) 若 P 为椭圆 Γ 上一点, 过点 P 作一条斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与双曲线 $\frac{y^2}{5m^2} - \frac{x^2}{5} = 1$ 仅有一个公共点, 求 m 的取值范围.

【解析】(1) $e = \frac{1}{2}$, (2) $m=3$, (3) $m \in (\sqrt{3}, 3]$.

$$\begin{aligned} & \text{设 } E(x_2, 1) \text{ 代入 } \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow x_2 = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}m. \\ & \text{由对称性, 不妨设 } M(-\frac{\sqrt{6}}{3}m, 1), A_1(-m, 0), A_2(m, 0) \\ & \overrightarrow{EA_1} \cdot \overrightarrow{EA_2} = (-m + \frac{\sqrt{6}}{3}m, -1) \cdot (m + \frac{\sqrt{6}}{3}m, -1) = -2 \Rightarrow \underline{m=3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{设过 } P \text{ 的直线 } l: y = \sqrt{3}x + t \\ & \begin{cases} y = \sqrt{3}x + t \\ 3x^2 + m^2y^2 = 3m^2 \end{cases} \Rightarrow (3+3m^2)x^2 + 2\sqrt{3}tm^2x + (t^2-3)m^2 = 0 \\ & \Delta_1 = 12t^2m^4 - 4(3+3m^2)(t^2-3)m^2 \geq 0 \\ & \Rightarrow \underline{t^2 \leq 3m^2+3} \quad ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = \sqrt{3}x + t \\ y^2 - m^2x^2 = 5m^2 \end{cases} \Rightarrow (3-m^2)x^2 + 2\sqrt{3}tx + (t^2-5m^2) = 0 \\ & \Delta_2 = 12t^2 - 4(3-m^2)(t^2-5m^2) = 0 \\ & \Rightarrow \underline{t^2 = 5m^2-15} \quad ② \\ & \begin{cases} ①② \Rightarrow 5m^2-15 \leq 3m^2+3 \Rightarrow m^2 \leq 9 \\ ② \Rightarrow 5m^2-15 \geq 0 \Rightarrow m^2 \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{m \in (\sqrt{3}, 3]} \end{aligned}$$

21. (本题满分 18 分) 本题共有 3 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 8 分.

设函数 $f(x) = ax^3 - (a+1)x^2 + x$, $g(x) = kx + m$, 其中 $a \geq 0$, $k, m \in R$, 若任意 $x \in [0, 1]$ 均有 $f(x) \leq g(x)$, 则称函数 $y = g(x)$ 是函数 $y = f(x)$ 的“控制函数”, 且对于所有满足条件的函数 $y = g(x)$ 在 x 处取得的最小值记为 $\bar{f}(x)$.

(1) 若 $a = 2$, $g(x) = x$, 试问 $y = g(x)$ 是否为 $y = f(x)$ 的“控制函数”;

(2) 若 $a = 0$, 使得直线 $y = h(x)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在 $x = \frac{1}{4}$ 处的切线, 证明: 函数 $y = h(x)$ 为函数 $y = f(x)$ 的“控制函数”, 并求 $\bar{f}\left(\frac{1}{4}\right)$ 的值;

(3) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ ($x_0 \in (0, 1)$) 处的切线过点 $(1, 0)$, 且 $c \in [x_0, 1]$, 证明: 当且仅当 $c = x_0$ 或 $c = 1$ 时, $\bar{f}(c) = f(c)$.

【解析】(1) 是, (2) $\bar{f}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$, (3) 略.

$$\begin{aligned} a=2 \text{ 时, } f(x) &= 2x^3 - 3x^2 + x, \quad g(x) = x. \\ f(x) - g(x) &= 2x^3 - 3x^2, \quad \text{令 } h(x) = 2x^3 - 3x^2, \quad x \in [0, 1] \\ h'(x) &= 6x^2 - 6x = 6x(x-1) \leq 0. \quad \therefore h(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上 } \downarrow \\ h_{\max} &= h(0) = 0 \quad \therefore f(x) - g(x) \leq h_{\max} = 0 \quad \therefore \text{是控制函数} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a=0 \text{ 时, } f(x) &= -x^2 + x \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} \quad f'(x) = -2x + 1 \\ f'\left(\frac{1}{4}\right) &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \quad \therefore h(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{16} \\ \text{即 } h(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \quad f(x) - h(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} \\ \therefore f(x) - h(x) &= -\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \leq 0 \quad \text{恒成立} \quad \therefore h(x) \text{ 是 } f(x) \text{ 的控制函数} \\ \text{又 } f\left(\frac{1}{4}\right) &= h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}, \quad \text{且 } g\left(\frac{1}{4}\right) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} \\ \therefore \bar{f}\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$